

Rozdział 1

Przekładnie i mechanizmy – wprowadzenie

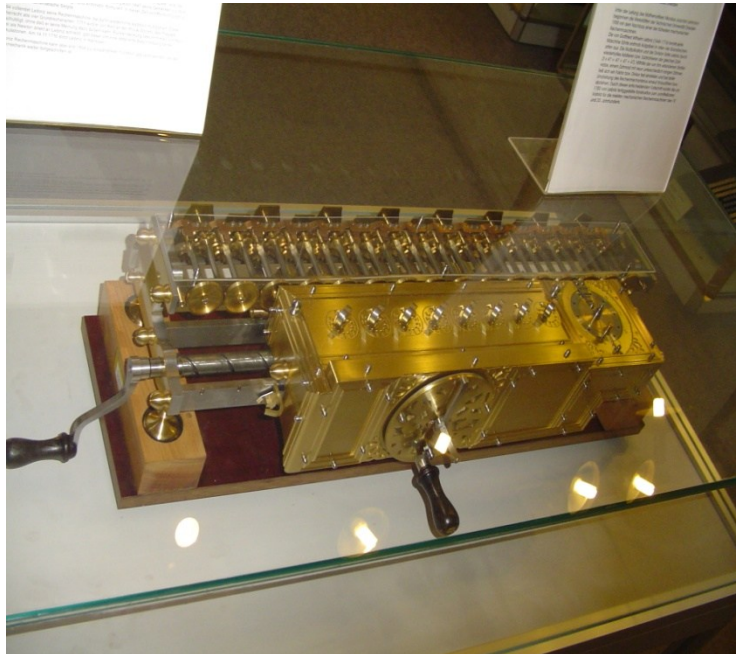
Urządzenia mechaniczne w mechatronice

Każde urządzenie mechatroniczne zawiera podzespoły mechaniczne. Najczęściej one służą do przetwarzania energii mechanicznej, natomiast coraz rzadziej do przetwarzania informacji (na przykład tak jak obecnie w zegarku mechanicznym, w mechanicznym programatorze pralki automatycznej czy w domowym liczniku zużytej wody).

W technice **przetwarzania informacji** urządzenia mechaniczne dominowały do połowy XX wieku, np. maszyny do obliczeń¹, mechaniczne maszyny szyfrujące (jak powszechnie znana *Enigma*), kalkulatory artyleryjskie, różne mierniki, np. ciśnieniomierze, wagi itd., używane jeszcze w latach pięćdziesiątych XX wieku. Mechaniczną maszynę liczącą zbudowaną przez Leibniza pokazuje fotografia (Rys. 1.1).

W latach 20-tych XX wieku pojawiła się żarzona elektronowa lampa katodowa, jednak jej zastosowanie było ograniczone ze względu na znaczny pobór energii – i co ważniejsze – wynikającą stąd małą niezawodność. Jeszcze w latach 60-tych ponad 80 % instalacji automatyki przemysłowej oparte było na urządzeniach pneumatycznych (czyli mechanicznych), jako tańszych, i – przede wszystkim – w tamtych czasach bardziej niezawodnych. Dopiero półprzewodniki i elementy scalone utorowały drogę urządzeniom elektronicznym, ponieważ są miniaturowe, łatwe w realizacji złożonych funkcji matematycznych, tanie – i najbardziej niezawodne.

¹ bodaj pierwszym który zbudował mechaniczną maszynę liczącą był Leibnitz (1646 – 1716); można ją zobaczyć w Domu Leibniza w Hanowerze [http://de.wikipedia.org/wiki/Leibnizhaus_(Hannover)]



Rys. 1.1. Maszyna licząca Leibnitza

Współcześnie urządzenia mechaniczne są stosowane tylko tam, gdzie to jest niezbędne, to jest do przetwarzania energii mechanicznej: z silnika lub od ludzkiej ręki do napędu organów roboczych maszyn i urządzeń. Podstawowe wady urządzeń mechanicznych w porównaniu do urządzeń elektronicznych są następujące:

1. Mała niezawodność – i to jest **podstawowa** wada; wynika ona stąd, że każdy mechanizm posiada **części ruchome**, które muszą być połączone do korpusu (obudowy) i połączone między sobą za pomocą tzw. par kinematycznych (tzn. łożysk, prowadnic, współpracujących kół i dźwigni, przegubów itp.), i one są głównym źródłem uszkodzeń;
2. Drugą przyczyną gorszej niezawodności urządzeń mechanicznych jest ta, że zwykle przetwarzają one znacznie większe strumienie energii niż odpowiadające im układy elektroniczne, znaczna część tej energii jest rozpraszana i zamienia się na ciepło, które powoduje że lokalnie dochodzi do nadmiernego wzrostu temperatury i pogorszenia współpracy elementów (np. w łożysku);
3. Znaczne gabaryty i masa (trudniej uzyskać miniaturowość);

4. Znaczny koszt wykonania;

a także hałaśliwość, drgania, konieczność regularnej obsługi (np. smarowania), większa wrażliwość na zmianę warunków zewnętrznych (np. temperaturę otoczenia, drgania itp.), korozyjność i inne.

Te fakty powodują, że urządzenia mechaniczne wymagają szczególnej uwagi podczas projektowania i eksploatacji. Podzespoły mechaniczne są też najczęstszym powodem uszkodzeń urządzeń mechatronicznych. Dlatego inżynier powinien wykazać się dobrą znajomością zjawisk występujących w układach mechanicznych.

W konsekwencji trudności stwarzanych przez urządzenia mechaniczne konstruktorzy starają się ograniczyć stosowanie zespołów mechanicznych i zastępować je innymi nie-mechanicznymi rozwiązaniami.

Układy mechaniczne nie mogą być wyeliminowane i zastąpione elektronicznymi, gdy sygnał wejściowy lub wyjściowy (lub obydwa) mają charakter 'mechaniczny' (np. jest to siła, ciśnienie, przesunięcie czy moment siły).

Przeznaczenie przekładni

Przekładnią (lub mechanizmem) nazywa się układ mechaniczny który przetwarza energię mechaniczną. Różnica między '*przekładnią*' i '*mechanizmem*' jest głównie terminologiczna i wynika z tradycji nazewnictwa, np. nie mówi się *przekładnia krzywkowa* lecz *mechanizm krzywkowy*. W dalszym ciągu te terminy będą stosowane zamiennie.

Przekładnia powinna być rozpatrywana jako element składowy większego układu, który nazywa się **napędem**. Napęd zawiera zazwyczaj następujące elementy funkcjonalne:

- Źródło energii;
- Przetwornik energii źródła na energię mechaniczną;
- Przekładnia;
- Sprzęgło;
- Hamulec;
- Tłumik.

Przeznaczeniem przekładni (i mechanizmów) może być:

- Przeniesienie energii mechanicznej z jednego miejsca (np. od silnika) do innego miejsca;
- Zmiana charakteru ruchu (np. z obrotowego ruchu silnika na liniowy ruchu głowicy drukarki);
- Zmiana parametrów ruchu: prędkości i siły (lub momentu);
- Zmiana płaszczyzny ruchu.

Zazwyczaj przekładnia realizuje jednocześnie kilka z tych funkcji. Ponadto dodatkowo może pełnić rolę sprzęgła przeciążeniowego i/lub układu tłumiącego (tzn. rozpraszającego energię kinetyczną).

Źródła energii urządzeń mechatronicznych

Zazwyczaj źródłem energii jest elektryczna sieć energetyczna prądu przemiennego lub przemysłowa sieć pneumatyczna. W urządzeniach przenośnych może to być akumulator energii elektrycznej (akumulator lub bateria) lub butla ze sprężonym powietrzem.

W niestandardowych rozwiązaniach źródłem energii może być na przykład słoneczne ogniwo fotowoltaniczne (termo-woltaniczne) albo rozpedzone koło zamachowe (jak w samochodach z napędem hybrydowym).

Jeśli w przenośnym urządzeniu mechatronicznym przetwarzana jest tylko energia mechaniczna (jak np. w zegarku, w latającym modelu samolotu itp.), wygodnym źródłem napędu jest wstępnie napięta sprężyna (np. metalowa lub gumowa).

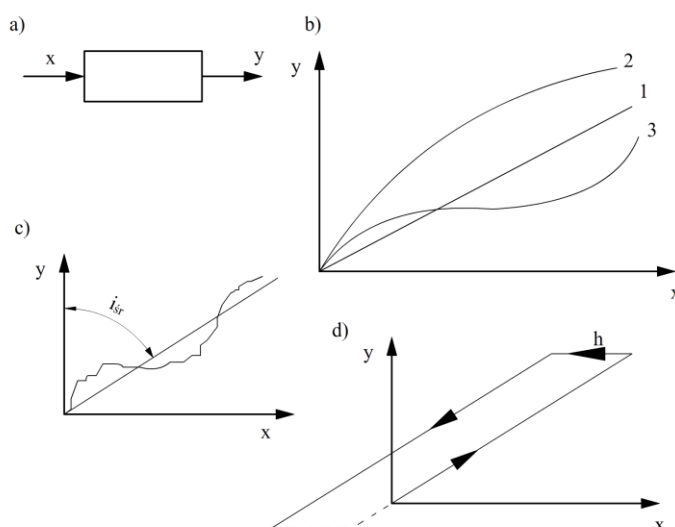
Podstawowe pojęcia

Niezależnie od konstrukcyjnej postaci przekładni i rodzaju przetwarzanych ruchów – oprócz ogólnie przyjętych w technice pojęć - jak niezawodność, sprawność itd. – do opisu przekładni używa się kilku wielkości, które opisują własności statyczne, dynamiczne i eksploatacyjne przekładni.

Charakterystyka statyczna

Charakterystyka statyczna przekładni jest zależnością przesunięcia y członu wyjściowego od wymuszonego przesunięcia x członu napędzającego w stanie ustalonym (najczęściej oznacza to stałą prędkość), co symbolicznie pokazano na rys. 1a.

Przebieg charakterystyki zależy od konstrukcji przekładni. Różne kształty w ograniczonym zakresie zmian sygnału wejściowego x pokazano na rysunku 1.2.



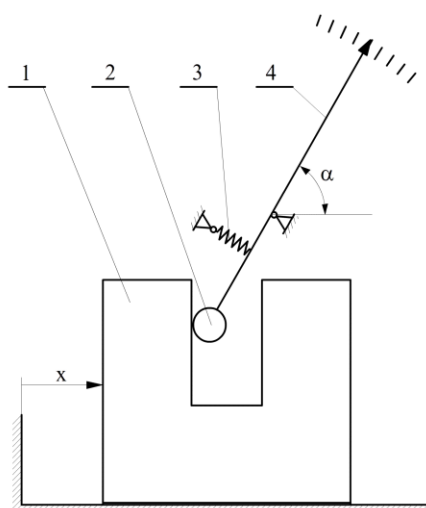
Rys. 1.2.
Charakterystyka statyczna $y = f(x)$ przekładni lub mechanizmu: a) przedstawienie symboliczne; b) przykładowe charakterystyki; c) charakterystyka

liniowa (1), nieliniowa (2); cyklicznie zmienna (3), c) przelozienie srednie i_s ; d) histereza b

Luz przekladni i histereza charakterystyki statycznej

Każda przekładnia zawiera elementy konstrukcyjne, które przy niewielkich siłach można traktować jako sztywne, oraz połączenia tych elementów (przeguby, prowadnice, łożyska), które nazywają się *parami kinematycznymi*. W tych parach zawsze występują luzy². Istnienie luzów objawia się niejednoznacznością charakterystyki statycznej przekładni przy zmianie kierunku ruchu przekładni (Rys. 1.2d). Na przykład dla przekładni zębatej ta niejednoznaczność charakterystyki spowodowana jest dwoma przyczynami:

- luzem między zębami: zmiana kierunku momentu napędowego powoduje, że koło napędowe musi wykonać niewielki obrót aby 'wybrać' ten luz;



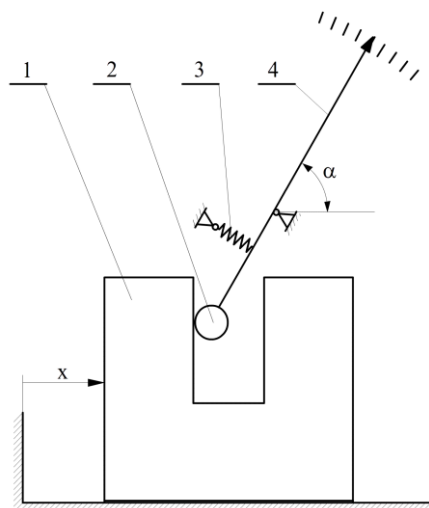
- zmianę kierunku siły międzyzębnej (siły przyporu) na przeciwny, w związku z czym zmienia się **linia działania** tej siły (kąt przyporu α zmienia się na $-\alpha$ (patrz rysunek 8 w rozdz. „Przekł. zębate”), a zatem zmieniają się kierunki i linie działania sił reakcji w łożyskach i prowadnicach, więc walki w łożyskach zmieniają swoje położenie w granicach luzu i koło napędowe zmienia swoje położenie o wielkość b (rys. 1.1d).

Rys. 1.3. Usuwanie skutku luzu za pomocą sprężyny zwrotnej w mechanizmie sinusoidalnym: 1 – suwak z wycięciem, 2 – kolek, 3 – sprężyna zwrotna, 4 - wskazówka

Różnica sygnału wejściowego b po zmianie kierunku ruchu, pokazana na rysunku 1.2d nazywa się *histerezą charakterystyki statycznej*.

Histereza jest wadą w przekładniach pomiarowych (powoduje błąd toru pomiarowego) a także w przekładniach napędowych pracujących w trybie nawrotnym, ponieważ powoduje uderzenia i przeciążenia, szczególnie w parach

² które umożliwiają wprowadzenie smaru i zapobiegają zakleszczaniu w przypadku odkształceń wywołanych zmianami temperatury i zmianami sił



kinematycznych. Aby usunąć tę wadę, w przekładniach pomiarowych (o ograniczonym zakresie ruchu) montuje się tzw. sprężynę zwrotną, która wprowadza siłę większą od siły tarcia i dzięki temu przekładnia jest

obciążona stale w jednym kierunku. Ideę tego sposobu pokazano na rysunku 1.3.

Przełożenie

Przełożenie jest zdefiniowane jako stosunek przyrostu **prędkości** elementu napędzającego czyli czynnego (np. prędkości obrotowej wałka ω_{we} 'wejściowego') do przyrostu prędkości elementu napędzanego ('wyjściowego') ω_{wy} :

$$i = \frac{d\omega_{we}}{d\omega_{wy}} \quad (1.1)$$

lub odpowiednio jako stosunek przyrostu prędkości liniowej. Przełożenie jest także stosunkiem przyrostu **przesunięcia** x (kątownego lub liniowego) organu wejściowego do przyrostu przesunięcia organu wyjściowego, co wynika z poniższego przekształcenia definicji (1.1):

$$i = \frac{d\omega_{we}}{d\omega_{wy}} = \frac{\frac{dx_{we}}{dt}}{\frac{dy_{wy}}{dt}} = \frac{dx_{we}}{dy_{wy}} \quad (1.2)$$

zatem przełożenie jest tangensem kąta nachylenia statycznej charakterystyki kinematycznej przekładni $y = f(x_{we})$ (Rys. 1.2).

Dokładność

Dokładność kinematyczna przekładni jest określona dokładnością jej charakterystyki statycznej³ (Rys. 1). Można tu wyróżnić błąd liniowości i błąd powtarzalności.

Maksymalny moment

Jest to największy moment (lub siła), który może być przyłożony do organu wejściowego lub do organu wyjściowego przekładni, nie powodujący trwałego uszkodzenia elementów przekładni. Tym uszkodzeniem może być trwale plastyczne odkształcenie lub zniszczenie elementu (np. złamanie zęba koła zębatego lub nadmierne trwale rozciągnięcie paska).

³ przez *dokładność* będziemy tu rozumieli odchylenie charakterystyki rzeczywistej od charakterystyki teoretycznej, przyjętej w danym przypadku jako model, np. od linii prostej, jak na rysunku 1c.

Sztywność przekładni

Określa wrażliwość charakterystyki statycznej na zmiany momentu obciążającego. Załóżmy, że człon wyjściowy jest zahamowany; teraz badamy jak przesuwa się człon wejściowy gdy zmienia się obciążenie przekładni M_{wej} na wejściu. Zatem sztywność może być zdefiniowana wzorem:

$$c = \frac{dM_{wej}}{dx} \quad \text{przy } y = \text{const} \quad (1.3)$$

gdzie x jest położeniem członu wejściowego.

Sprawność

Sprawność przekładni jest stosunkiem mocy oddawanej przez przekładnię N_{wy} do mocy pobieranej przez przekładnię N_{we}

$$\eta = \frac{N_{wy}}{N_{we}} \quad (1.4)$$

Wyróżnia się sprawność średnią (np. dla pełnego obrotu koła) oraz tzw. sprawność chwilową η_c : $\eta_c = \frac{dN_{wy}}{dN_{we}}$, w określonym położeniu przekładni.

Sprawność chwilowa zmienia się tak jak zmienia się chwilowy moment tarcia, np. w przekładni zębatej zależy on od chwilowego położenia punktu przyporu i od chwilowej wartości momentu M_{we}

Ponieważ w przekładni zawsze występują straty o mocy N_{strat} zatem

$$\eta = \frac{N_{wy}}{N_{we}} = \frac{N_{we} - N_{strat}}{N_{we}} = 1 - \frac{N_{strat}}{N_{we}} < 1 \quad (1.5)$$

Jako, że główną przyczyną strat mocy w urządzeniach mechanicznych jest tarcie, zatem:

$$\eta = 1 - \frac{N_{strat}}{N_{we}} = 1 - \frac{M_{tar} \Delta t}{M_{we} \Delta t} = 1 - \frac{M_{tar}}{M_{we}} \quad (1.6)$$

gdzie M_{tar} jest momentem tarcia a M_{we} jest momentem wymuszającym; obydwie są sprowadzone do walka wejściowego. Ten związek pozwala ocenić wartość sprawności przekładni jeśli można zmierzyć moment tarcia i moment wyjściowy. Z tego równania także wynika, że sprawność może się zmieniać: może zależeć od prędkości, od mocy i od chwilowego wzajemnego położenia elementów przekładni, np. w przekładni zębatej zmienia się wzdłuż odcinka przyporu zębów (patrz rozdz. Przekładnie zębate, rysunek 10).

W przekładniach mechanicznych sprawność obniżają następujące zjawiska rozpraszania energii:

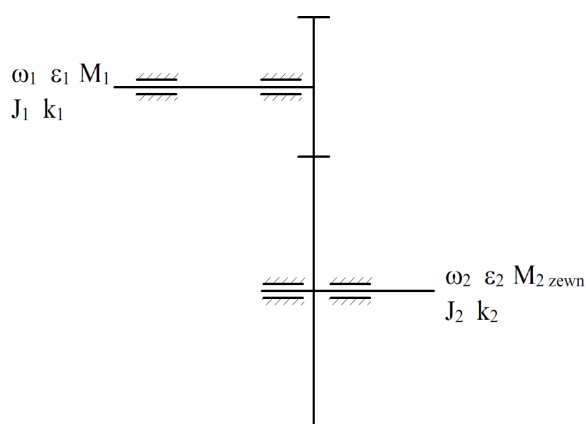
- praca tarcia w miejscach poślizgu, np. współpracujących zębów w przekładni zębatej, paska o koło w przekładni cięgnowej itd.;
- opory wewnętrzne podczas ruchu w smarze, opory powietrza poruszających się elementów;
- - histereza materiałowa w miejscach odkształceń nie-idealnie sprężystych, np. ciągnięć, czyli tarcie wewnętrzne w materiałach, szczególnie w tworzywach sztucznych.

Własności dynamiczne napędu

Przenoszenie prędkości i momentów w przekładni

Rozpatrzmy jednostopniową przekładnię o danym przelozeniu i . Przykładowo może to być przekładnia zębata lub cierna, pokazana na rysunku 1.4.

Załóżmy, że jest znany (dany) moment zewnętrzny M_1 przyłożony do wałka wejściowego (1), a także zewnętrzny moment obciążający wałek wyjściowy (2). Szukana jest prędkość ω i przyspieszenie kątowe ϵ ruchu obrotowego obu wałków.



Rys. 1.4. Przykładowa przekładnia

Oznaczenia:

i – przelozenie przekładni; M_1 – moment zewnętrzny na wałku 1 i M_{2zewn} – moment zewnętrzny na wałku 2; ω_1 i ω_2 – prędkości kątowe;

ϵ_1 i ϵ_2 – przyspieszenia kątowe;

J_1 i J_2 – momenty bezwładności wałka i wszystkich elementów osadzonych na wałku 1 i 2; k – współczynniki tłumienia wiskotycznego.

Na początek rozważmy, jak przekładnia przenosi moment siły **w stanie ustalonym**, tzn. przy pominięciu sił tłumienia i sił bezwładności. Pytanie brzmi: jaki moment M_1 należy przyłożyć do wałka 1 aby pokonać moment M_2 (dany)

przyłożony do wałka 2? Z równości mocy na wejściu i na wyjściu (przy pominięciu siły tarcia statycznego) wynika:

$$M_1 \cdot \omega_1 = M_2 \cdot \omega_2$$

zatem:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_2}{M_1} = i \quad (1.7)$$

czyli czyli moment na wałku 1 potrzebny do zrównoważenia momentu M_2 wałka 2 **w stanie ustalonym** wynosi:

$$M_1 = \frac{1}{i} M_2 \quad (1.8)$$

Ponadto zauważmy, że z definicji przelżenia (wzór 1.1) $i = \frac{d\omega_1}{d\omega_2}$ wynika:

$$i = \frac{d\omega_1}{d\omega_2} = \frac{\frac{d\omega_1}{dt}}{\frac{d\omega_2}{dt}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (1.9)$$

gdzie $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ jest przyspieszeniem kątowym;

oraz:

$$\omega_2 = \frac{1}{i} \omega_1 \quad (1.10)$$

Dalsze rozważania dotyczą układu **dynamicznego**, zlinearyzowanego ⁴.

Ogólne równanie dynamiki dla ruchu obrotowego jest sumą momentów działających na ten wałek, podzieloną przez moment bezwładności, przyrównaną do przyspieszenia kąowego (1.11):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \sum_i M_i \quad (1.11)$$

Zatem dla wałka (2) równanie ruchu będzie:

$$J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = M_2 - M_{2zewn} - k_2 \cdot \omega_2 \quad (1.12)$$

gdzie M_2 jest momentem oddziaływania wałka 1 na wałek 2, a wyrażenie

$$k_2 \cdot \omega_2$$

jest momentem tłumienia wewnętrznego wałka (2) (np. od sił wiskotycznych w szczelinach łożysk) ⁵;

$$\text{stąd: } M_2 = M_{2zewn} + k_2 \cdot \omega_2 + J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} \quad (1.13)$$

Analogicznie, równanie ruchu dla wałka 1 jest:

⁴ tzn. opisanego równaniami różniczkowymi liniowymi

⁵ moment tarcia suchego został tu celowo pominięty, ponieważ jest nieliniowo zależny od prędkości, w związku z czym równania różniczkowe (12) i (14) musiały by być zapisane jako nieliniowe

$$J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = M_1 - k_1 \cdot \omega_1 - M_2 \cdot \frac{1}{i} \quad (1.14)$$

gdzie człon $-M_2 \cdot \frac{1}{i}$ reprezentuje oddziaływanie wałka 2 na wałek 1, zgodnie ze wzorem (1.8).

Po wstawieniu (1.13) do (1.14) i wykorzystaniu wzorów (1.9) i (1.10) i otrzymujemy równanie ruchu dla całego układu złożonego z wałków 1 i 2:

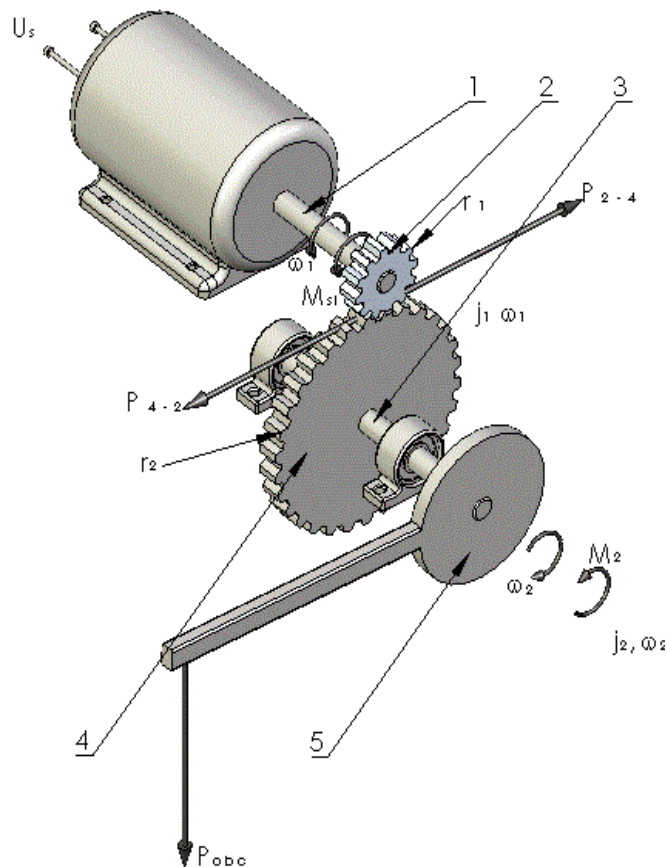
$$\left(J_1 + J_2 \cdot \frac{1}{i^2}\right) \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = M_1 - \left(k_1 + k_2 \cdot \frac{1}{i^2}\right) \cdot \omega_1 - M_{zewn} \cdot \frac{1}{i} \quad (1.15)$$

Ze wzoru (14) widać, że jeśli przełożenie $i > 1$ (tzn. przekładnia jest ‘zwalniająca’ czyli zmniejszająca prędkość), to wpływ bezwładności i tarcia wiskotycznego wałka napędzanego 2 na bezwładność i tarcie wiskotyczne w równaniu ruchu wałka silnika (1) maleje w stosunku $\frac{1}{i^2}$.

Określanie własności dynamicznych napędu

Zbadajmy zachowanie całego napędu w stanach nieustalonych, tzn. po zmianie obciążenia lub po zmianie sygnału sterowania. Własności dynamiczne są szczególnie ważne gdy napęd jest używany w układach pozycjonowania, przestawiania itp., np. w serwomechanizmie.

Sygnałem sterującym jest zazwyczaj prąd lub napięcie przyłożone do silnika elektrycznego, albo ciśnienie powietrza skierowanego do siłownika pneumatycznego. W sensie dynamiki, przekładnia i silnik (czy siłownik) stanowią jedną całość, i dlatego własności dynamiczne **muszą** być analizowane łącznie, dla całego układu.



Rys. 1.5. Przykładowy napęd

Rozpatrzmy typowy przykład pokazany na rysunku 1.5. Układ zawiera silnik elektryczny prądu stałego, sterowany napięciem U_s . Do silnika dołączona jest przekładnia zębata, o dużym przełożeniu (rzędu kilkuset), zatem wielostopniowa (dla prostoty na rysunku pokazano tylko jeden stopień zawierający koła 2 i 4). Do wałka wyjściowego przymocowane jest urządzenie robocze (np. ramię robota, antena śledząca, stół obrabiarki itp.), pokazane na rysunku symbolicznie w postaci ciała 5.

Do oceny własności dynamicznych napędu zazwyczaj miarodajna jest funkcja:

$$\omega_2(t) = f(U_s(t), M_2(t)) \quad (1.16)$$

opisująca przebieg czasowy prędkości wałka wyjściowego w zależności od

sterowania i zakłócenia – w tym przypadku sterowaniem jest napięcie U_s , a zakłóceniem w sensie sterowania jest moment obciążenia zewnętrzny M_2 . Zależność (1.16) jest równaniem różniczkowym (1.21).

Jeśli analizowany układ może być uznany jako liniowy ⁶, wówczas do oceny własności dynamicznych może posłużyć na przykład transmitancja operatorowa zdefiniowana następująco:

$$G(s) = \frac{\omega_2(s)}{U(s)} \quad (1.17)$$

lub inne charakterystyki np. wykresy Bodego czy Nyquista.

Charakterystyki dynamiczne zależą oczywiście od konstrukcji obiektu, i zadaniem jest określenie tych zależności.

W badanym przykładzie charakterystyki dynamiczne zależą od momentów bezwładności wirujących mas, przełożenia przekładni i konstrukcji silnika elektrycznego. Utworzymy model matematyczny układu.

Oznaczenia

J_1	kg.m ²	Łączny moment bezwładności elementów na wałku silnika 1: wirnika silnika, wałka 1 i koła 2
J_2	kg.m ²	Łączny moment bezwładności elementów na wałku 3: wałka 3, koła 4 i dołączonych elementów roboczych 5
P	N	Składowa styczna siły międzyzębnej w przekładni (zębatej albo w przekładni ciernej lub cięgnowej)
r_1, r_2	m	Promienie działania siły P
M_{el}	Nm	Moment wytwarzany przez pole elektromagnetyczne, działający na wirnik silnika
M_2	Nm	Moment obciążenia zewnętrznego wałka 3 (łącznie z momentem tarcia, tłumieniem i siłami sprężystości – jeśli są obecne)
ω	rad/s	Prędkość obrotowa

Zgodnie z ogólnym równaniem dynamiki dla ruchu obrotowego (11), dla wałka 1:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1} (M_{el} - P \cdot r_1), \text{ stąd:}$$

$$P = \frac{1}{r_1} \left(-J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + M_{el} \right) \quad (1.18)$$

Analogicznie dla wałka 3:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{J_2} (-M_2 + P \cdot r_2), \text{ stąd:}$$

$$P = \frac{1}{r_2} \left(J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} + M_2 \right) \quad (1.19)$$

⁶ to znaczy opisany równaniami liniowymi (algebraicznymi lub różniczkowymi)

Po porównaniu stronami równań (18) i (19):

$$\frac{1}{r_2} \left(J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} + M_2 \right) = \frac{1}{r_1} \left(-J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + M_{el} \right) \quad (1.20)$$

Jeśli uwzględnimy, że $\frac{r_2}{r_1} = i$ oraz że $\frac{\frac{d\omega_1}{dt}}{\frac{d\omega_2}{dt}} = i$ gdzie „ i ” jest przelozieniem przekładni, to równanie (20) będzie:

$$J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} + M_2 + i^2 \cdot J_1 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} - i \cdot M_{el} = 0$$

Stąd, po uporządkowaniu:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{i \cdot M_{el} - M_2}{J_2 + i^2 \cdot J_1} \quad (1.21)$$

Równanie (21) jest *równaniem stanu*, a *zmienną stanu* jest prędkość ω_2 . Jako zmienną stanu alternatywnie można przyjąć prędkość ω_1 wałka 1, wówczas równoważne mu równanie stanu przyjmie postać (1.22).

Ponieważ $\omega_2 = \frac{1}{i} \omega_1$ (wzór 10) skąd $i = \frac{d\omega_1}{d\omega_2}$, zatem równanie (21) ze względu na $\frac{d\omega_1}{dt}$ ma postać:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = i \cdot \frac{i \cdot M_{el} - M_2}{J_2 + i^2 \cdot J_1} = \frac{M_{el} - \frac{1}{i} M_2}{\frac{1}{i^2} J_2 + J_1} \quad (1.22)$$

Równania (1.21) i (1.22) są zgodne z (1.15) dla tłumienia $k_1 = k_2 = 0$.

Z równania (1.21), a także z (1.22) wynika, że im przelozenie i jest większe (zazwyczaj jest duże), tym mniejsze znaczenie dla dynamiki układu ma

bezwładność obciążenia J_2 , podobnie moment obciążenia M_2 .

Aby wyznaczyć charakterystykę dynamiczną całego napędu, należy dodatkowo wykorzystać równanie dynamiki silnika; np. dla silnika prądu stałego w postaci (patrz rozdział *Ociepy, Model i symul w Mechatronice*, s. 164, wzór 8.8] lub [tygrys 2003 s. 289]:

$$\frac{dI}{dt} = -k_1 \cdot I - k_2 \cdot \omega_1 + \frac{1}{L} \cdot U_s \quad (1.23)$$

oraz równanie (1.22) w postaci:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{k_3 \cdot c_M \cdot I - \frac{1}{i} M_z}{J_1 + \frac{1}{i^2} J_2} \quad (1.24)$$

gdzie: M_z – moment obciążenia zewnętrznego, I – prąd, k_3 , c_M – stałe współczynniki.

Układ równań (1.23) i (1.24) jest modelem matematycznym napędu. Występują tu cztery zmienne zależne od czasu: prąd $I(t)$, napięcie sterowania silnika $U_s(t)$,

prędkość obrotowa $\omega(t)$ oraz moment obciążenia $M_z(t)$. W typowym przypadku napięcie $U_s(t)$ jest sygnałem wejściowym, prędkość $\omega(t)$ jest sygnałem wyjściowym i jednocześnie zmienną stanu, moment $M_z(t)$ jest zakłóceniem, a prąd $I(t)$ jest drugą zmienną stanu.

Jeśli dane są dwie spośród nich, pozostałe dwie można wyliczyć.

Równania (23) i (24) są zwyczajnymi równaniami różniczkowymi **liniowymi**. Można zatem dokonać ich transformacji operatorowej i wyznaczyć transmitancje, jak poniżej.

Przy założeniu, że:

1. moment zewnętrzny zależy tylko od czasu (a nie na przykład także od położenia i prędkości),
2. a także przy zerowych warunkach początkowych wszystkich zmiennych (inaczej mówiąc, wszystkie cztery zmienne zależne od czasu: prąd $I(t)$, napięcie sterowania silnika $U_s(t)$, prędkość obrotowa $\omega(t)$ oraz moment obciążenia $M_z(t)$ będziemy rozumieli teraz jako ich przyrosty)

można równania różniczkowe (23) i (24) poddać transformacji operatorowej Laplace'a:

$$I(s) \cdot s = -k_1 \cdot I(s) - k_2 \cdot \omega_1(s) + \frac{1}{L} \cdot U_s(s) \quad (1.23')$$

$$\omega_1(s) \cdot s = \frac{1}{J} \cdot \left(k_3 \cdot c_M \cdot I(s) - \frac{1}{i} \cdot M_z(s) \right) \quad (1.24')$$

$$\text{gdzie } J = J_1 + \frac{1}{i^2} \cdot J_2$$

Zamiast czasu, nową zmienną niezależną jest zmienna zespolona $s = j\omega$, gdzie ω jest częstotliwością.

Z tych dwóch równań można wyeliminować zmienną $I(s)$ i otrzymuje się jedno równanie z trzema zmiennymi: $\omega_1(s)$, $I(s)$ oraz $M_z(s)$.

$$s^2 \cdot \omega_1(s) + k_1 \cdot s \cdot \omega_1(s) + \frac{1}{J} \cdot k_3 \cdot c_M \cdot k_2 \cdot \omega_1(s) - \frac{k_3 \cdot c_M}{J \cdot L} \cdot U_s(s) + \frac{1}{J \cdot i} (s + k_1) \cdot M_z(s) = 0 \quad (1.25)$$

Z tego równania można otrzymać dwie transmitancje:

$$\text{wejściowo – wyjściowa } G_{we-wy} = \frac{\omega_1(s)}{U_s(s)} \text{ oraz zakłóceniewa: } G_{zakł} = \frac{\omega_1(s)}{M_z(s)}$$

Transmitancję wejściowo – wyjściową $G_{we-wy} = \frac{\omega_1(s)}{U_s(s)}$ określimy dla zerowej

wartości przyrostu momentu obciążenia $M_z(t) = 0$. Po przekształceniach wzoru (1.25) otrzymamy:

$$G_{we-wy} = \frac{\omega_1(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{k_3 \cdot c_M}{J \cdot L}}{s^2 + k_1 \cdot s + \frac{k_3 \cdot c_M \cdot k_2}{J}} \quad (1.26)$$

lub w postaci standardowej:

$$G_{we-wy} = \frac{\omega_1(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{J}{k_3 \cdot c_M \cdot k_2} \cdot s^2 + \frac{k_1 \cdot J}{k_3 \cdot c_M \cdot k_2} \cdot s + 1} \quad (1.27)$$

Transmitancję zakłóceniovą: $G_{zakł} = \frac{\omega_1(s)}{M_z(s)}$ określimy dla zerowej wartości przyrostu sygnału sterującego (napięcia) $U_s = 0$. Po przekształceniach wzoru (1.25) otrzymamy:

$$G_{zakł} = \frac{\omega_1(s)}{M_z(s)} = - \frac{\frac{1}{J \cdot i} \cdot (s + k_1)}{s^2 + k_1 \cdot s + \frac{k_3 \cdot c_M \cdot k_2}{J}} \quad (1.28)$$

Znak minus mówi, że przyrost momentu M_z powoduje spadek prędkości ω_1 . Zauważmy, że mianowniki obu transmitancji (1.26) i (1.28) są jednakowe, ponieważ charakteryzują odpowiedź własną tego samego układu.

Rodzaje przekładni

1. Ze względu na zasadę działania można wyróżnić:
 - Przekładnie zębate
 - Przekładnie cięgnowe
 - Przekładnie cierne
 - Przekładnie śrubowe
 - Mechanizmy sinusowe, tangensowe, jarzmowe, dźwigniowe, korbowe
 - Mechanizmy krzywkowe
 - Mechanizmy o ruchu przerywanym: krzyż maltański, mechanizm zapadkowy, przekładnia dziesiątkująca.
2. Ze względu na konstrukcję można wyróżnić przekładnie jedno- i wielo-stopniowe, różnicowe i planetarne oraz przekładnie falowe.
3. Ze względu na przeznaczenie przekładni (czy mechanizmu) można wyróżnić:
 - Przekładnie napędowe;
 - Przekładnie pomiarowe;

- Przekładnie pomocnicze.

Stawia się im zróżnicowane wymagania, jak niżej.

Przekładnie pomiarowe

Są elementem w łańcuchu pomiarowym. Przenoszą małe momenty (standardowo jest to moment tarcia i moment zwrotny sprężyny kasującej luzy), ruch jest zwykle w obie strony, ale moment jest tylko w jednym kierunku, prędkości są małe.

Pracują zwykle ruchem przerywanym i/lub nawrotnym.

Powinny mieć małe straty tarcia i dużą dokładność kinematyczną czyli liniowość i powtarzalność charakterystyki statycznej oraz brak luzów.

Od przekładni pomiarowych dodatkowo wymaga się:

- dokładności kinematycznej (tzn. powtarzalności i ewentualnie liniowości charakterystyki statycznej przesunięcie na wyjściu od przesunięcia na wejściu, bez obciążenia);
- dostatecznie dużej sztywności $c = \frac{dM}{d\varphi}$, rozumianej jako nachylenie charakterystyki obciążeniowej przekładni $\varphi = f(M)$ gdzie M jest momentem przyłożonym do wałka wejściowego przekładni, kąt φ jest kątem obrotu wałka wejściowego przy unieruchomionym wałku wyjściowym;
- małego momentu tarcia M_{tar}

Przekładnie napędowe

Zazwyczaj mają duże przełożenie (zmniejszają prędkość), ponieważ najczęściej źródłem energii jest silnik elektryczny (standardowo ma znamionową prędkość 3000 obr/min), a organ roboczy obraca się wolniej. Wymaga się stałego przełożenia, aby przekładnia nie generowała drgań i nie hałasowała, ponadto odpowiednio dużego przełożenia, małych gabarytów i dużej sprawności. To ostatnie nie tylko ze względu na koszt straconej energii ale na konieczność odprowadzenia ciepła. Kierunek ruchu jest zazwyczaj stały, ale może być zmienny (np. w serwomechanizmach).

W mechatronice przekładniom napędowym stawia się wiele wymagań, wśród nich są dwa przeciwstawne: małe gabaryty i duża sprawność.

Przekładnie napędowe w układach sterowania

Wymaga się stałego przełożenia i możliwie małego momentu bezwładności, ponieważ pracują w trybie nawrotnym (w obu kierunkach) z dużymi przyspieszeniami i prędkościami.

Duża sprawność powoduje małe nagrzewanie się (i lepsze warunki smarowania) oraz mniejszy pobór energii ze źródła, co jest nadzwyczaj istotne w przypadku urządzeń przenośnych.

Przekładnie pomocnicze

Powinny odznaczać się prostotą konstrukcji, dzięki czemu są niezawodne i łatwe w obsłudze.

Od wszystkich przekładni – tak jak od innych zespołów mechatroniki – wymaga się: trwałości, niezawodności i łatwej obsługi.

Wstępne oszacowanie potrzebnej mocy napędu i przełożenia przekładni

Projektowanie lub ocenę istniejącego napędu należy rozpocząć od oszacowania zapotrzebowania na energię mechaniczną i określenia jej parametrów w miejscu końcowym. Znajomość tych parametrów jest potrzebna do tego, aby określić typ i potrzebne parametry źródła energii oraz typ i podstawowe parametry przekładni.

Moc mechaniczna w ruchu obrotowym jest:

$$N = M \cdot \omega \quad (1.29)$$

$$\text{lub w ruchu liniowym: } N = P \cdot v \quad (1.29a)$$

gdzie M jest momentem, P jest siłą, ω jest prędkością kątową a v jest prędkością liniową. Największa potrzebna moc będzie w stanach nieustalonych układu, na przykład w fazie rozruchu.

Moc dostarczana przez źródło musi być odpowiednio większa, ze względu na straty w przekładni, łożyskach, przewodnicach itp.:

$$N_{\text{źródła}} = \frac{N}{\eta} \quad (1.30)$$

gdzie $\eta < 1$ jest całkowitą sprawnością napędu.

Przy projektowaniu wstępnym wszystkie te wielkości mogą być tylko oszacowane, natomiast można je obliczyć lub zmierzyć gdy konstrukcja jest dana (tzn. znana jest geometria i stałe materiałowe).

Przykład

Obiektem jest napęd ramienia robota. Załóżmy, że źródłem energii jest elektryczna sieć energetyczna, a przetwornikiem silnik prądu stałego sterowany z komputera. Należy dobrać rodzaj przekładni i jej podstawowe parametry.

Na początek oceniamy zapotrzebowanie energii: założmy, że robot ma podnieść ciężar o masie 20 kg na wysokość $H = 0,5\text{m}$ w czasie 5 sekund od stanu

spoczynku, zatem średnia prędkość powinna być $0,5/5 = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Największe

zapotrzebowanie energii będzie w fazie rozruchu; jeśli nie znamy dokładnej charakterystyki elektro-mechanicznej silnika (momentu w funkcji prędkości), we

wstępnej fazie projektowania musimy coś założyć, np. że faza rozruchu potrwa 1 s i koniec ramienia osiągnie prędkość $0,2 \frac{m}{s}$. Zatem przyspieszenie liniowe będzie

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,2}{1} = 0,2 \frac{m}{s^2}.$$

Sila na końcu ramienia będzie

$$P = (\text{masa} \times \text{całkowite przyspieszenie}) = m \cdot (a + g) = 20 \cdot$$

$$(0,2 + 9,81) = 200 \text{ N. Zatem moc użyteczna będzie } N = P \cdot v = 200 \cdot 0,2 = 100 \text{ W.}$$

Przy założeniu wartości całkowitej sprawności napędu (silnika, przekładni i łożysk)

$$\eta = 0,2, \text{ nominalna moc silnika powinna być } N_{siln} = \frac{N}{\eta} = \frac{100}{0,2} = 500 \text{ W.}$$

Z kolei należy określić całkowite przełożenie przekładni. Załóżmy, że w stanie ustalonym prędkość silnika wynosi $3000 \text{ obr}/\text{min} = 3000 \frac{2\pi}{60} \cong 300 \text{ rad}/\text{s}$.

Średnia prędkość obrotowa ramienia będzie (przy uproszczeniu ruchu po łuku do

$$\text{ruchu prostoliniowego) } \omega_{ramienia} = \left(\frac{\text{prędkość końca ramienia}}{\text{długość ramienia}} \right) = \frac{0,2 \frac{m}{s}}{400 \text{ mm}} =$$

$$0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \text{ Zatem całkowite przełożenie przekładni powinno być: } i = \frac{\omega_{silnika}}{\omega_{ramienia}} = \frac{3000}{0,5} = 6000.$$

Zauważmy ponownie, że są to obliczenia szacunkowe, jednak wystarczająco dokładne do sformułowania wymagań dla silnika i dla przekładni.

Oszacowanie błędu pomiarowego spowodowanego tarciem przekładni

Jeśli sygnałem pomiarowym wejściowym jest siła P (lub moment M)⁷, a sygnałem wyjściowym jest przesunięcie w (liniowe lub kątowe α), do przetworzenia powszechnie wykorzystywana jest sprężyna pomiarowa. Jej przesunięcie jest z reguły niewielkie, co wynika z żądania miniaturowości. Do zwiększenia przesunięcia należy więc zastosować przekładnię (lub mechanizm) o przełożeniu $i < 1$.

Przykładami takiego układu są powszechnie spotykane:

- manometr sprężynowy (z rurką Bourdone'a lub z mieszkim i sprężyną), z mechanizmem dźwigniowo-zębatym i wskazówką);
- elektromagnetyczny miernik prądu z obrotową cewką, sprężyną spiralną i wskazówką.

⁷ mierzoną wielkością może być np. ciśnienie, temperatura, prąd i inna, a w czujniku (np. w elemencie ciśnieniowym, w cewce) przetworzona jest na siłę P

Załóżmy, że znana jest siła tarcia T (lub moment tarcia M_t) mechanizmu sprowadzona do wejścia lub całkowita sprawność mechanizmu η . Wyznamy błąd bezwzględny Δw (lub $\Delta \alpha$) spowodowany siłą (lub momentem) tarcia.

Wychylenie wskazówki (lub innego elementu wyjściowego) jest:

$$w = \frac{P-T}{c} \cdot \frac{1}{i} \quad (1.31)$$

gdzie c jest sztywnością sprężyny sprowadzoną do wejścia, a i jest przłożeniem mechanizmu (od wejścia do wyjścia). Gdyby nie było tarcia ($T=0$), wychylenie byłoby

$$w = \frac{P}{c} \cdot \frac{1}{i}$$

Zatem szukany błąd bezwzględny wychylenia jest:

$$\Delta w = \frac{T}{c} \cdot \frac{1}{i} \quad (1.32)$$

natomiast błąd względny spowodowany tarciem:

$$\delta = \frac{\Delta w}{w} = \frac{T}{P} \quad (1.33)$$

Jeśli znana jest sprawność mechanizmu η , to możemy skorzystać z zależności (1.5):

$$\eta = \frac{N_{wy}}{N_{we}} = \frac{N_{we} - N_{strat}}{N_{we}} = 1 - \frac{T}{P} \quad (1.34)$$

Po wyrugowaniu siły tarcia T z równań (1.33) i (1.34) otrzymujemy prostą zależność na błąd względny w zależności od sprawności zależnej od tarcia:

$$\delta = \frac{\Delta w}{w} = 1 - \eta \quad (1.35)$$

Specyfikacja wymagań

Ogólne podstawowe wymagania stawiane napędom są takie same jak wszystkim urządzeniom i pod-zespołom urządzeń mechatronicznych, to znaczy: niezawodność i trwałość, masa i gabaryty, łatwa obsługa itd.

Szczególne wymagania charakterystyczne dla przekładni są następujące.

- Zakres ruchu, często powinien być nieograniczony;
- Przłożenie: może być stałe nienastawialne lub stałe ale nastawialne (jak w skrzyni biegów samochodu lub w ręcznej wiertarce, gdzie można nastawić żadaną prędkość obrotową przekładni lub silnika); ponadto: często żada się, aby przłożenie chwilowe jak najmniej różniło się od przłożenia średniego;
- Mała impedancja mechaniczna napędu od strony źródła energii, rozumiana jako $\frac{dM}{d\omega}$ w przypadku ruchu obrotowego lub $\frac{dP}{dw}$ w przypadku ruchu liniowego, gdzie M

jest momentem wytwarzanym przez silnik, P jest siłą wytwarzaną przez silownik, ω i v są prędkością kątową i prędkością liniową. Oznacza to mały moment bezwładności od strony silnika lub odpowiednio małą masę części ruchomych przekładni; mała impedancja przekładni powoduje szybsze zmiany prędkości napędu (np. przy rozruchu czy hamowaniu), co jest niezwykle ważne na przykład w serwomechanizmach;

- Przeciążalność, rozumianą jako odporność napędu na nadmierny wzrost obciążenia od strony odbiornika. W przypadku przeciążenia następuje zatrzymanie ruchu (jak np. w silowniku pneumatycznym) lub poślizg (jak np. w przekładni ciernej lub w sprzęgle przeciążeniowym) po to, aby nie dopuścić do unieruchomienia silnika elektrycznego klatkowego;

- Sprawność energetyczna, co ma dwa aspekty: 1) oszczędność energii, co jest szczególnie ważne gdy urządzenie jest przenośne i zasilane z baterii czy z butli sprężonego powietrza; 2) zmniejsza nagrzewanie się napędu a zatem wydłuża czas nieprzerwanej pracy i zmniejsza konieczność chłodzenia;

- Możliwość nastawiania przelozienia przekładni; z reguły charakterystyka silników (moc, moment, sprawność, zużycie energii zasilania w funkcji prędkości) określa dość wąski przedział ekonomicznej prędkości silnika, a w przypadku synchronicznego silnika elektrycznego jest to tylko jedna wartość prędkości, tymczasem użytkownik najczęściej żąda zmiennej prędkości roboczej napędu;

- Tłumienie oscylacji prędkości wokół nastawionej średniej prędkości roboczej, które mogą być spowodowane niestałym momentem generowanym przez silnik (np. spalinowy) lub niestałym momentem obciążenia (np. pompa tłokowa) – lub odpowiednio siłami w napędzie liniowym; takie tłumienie zmniejsza drgania całego napędu. Przykładem osiągnięcia dobrego tłumienia własnego jest przekładnia ciągnowa z ciągnem wzdłużnie elastycznym (np. paskiem gumowym);

Ponadto – w konkretnym przypadku – przekładni stawia się wymagania szczegółowe: na przykład moc, moment, żądany zakres prędkości, możliwość sterowania, dokładność sterowania i inne, a w stosunku do silnika – rodzaj i moc źródła energii zasilania.

Literatura

[Tarnowski –błędy] Tarnowski W.: Błędy mechanicznych przyrządów pomiarowych i elementów automatyki. Wydawn. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1985